

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HUYỀN TRANG

**SỰ TỒN TẠI NGHIỆM MẠNH ĐỊA PHƯƠNG
CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER - STOKES**

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số : 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: TS. Phạm Thị Thủy

Thái Nguyên, năm 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2020

Người viết luận văn

Trần Thị Huyền Trang

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Phạm Thị Thủy. Do đây là những kiến thức khá mới mẻ và khoảng thời gian nghiên cứu còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những sai sót. Tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô và mọi người để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Phạm Thị Thủy đã trực tiếp giao đề tài, hướng dẫn và giúp đỡ tận tình trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán cùng các quý thầy cô đã quan tâm, nhiệt tình giảng dạy trong suốt khóa học. Tôi cũng xin cảm ơn gia đình, bạn bè đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Trân trọng cảm ơn!

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Mục lục.....	iii
Lời nói đầu.....	1
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị	2
1.1. Không gian hàm	2
1.1.1. Không gian hàm trơn.....	2
1.1.2. Không gian hàm suy rộng	3
1.1.3. Không gian Sobolev	6
1.2. Phương trình Navier – Stokes	10
Chương 2. Nghiệm mạnh địa phương của hệ phương trình Navier – Stokes	15
2.1. Bài toán 1.....	15
2.1.1. Định nghĩa nghiệm yếu và nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier – Stokes trong $[0, T)$	15
2.1.2. Sự tồn tại nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier – Stokes trong $[0, T)$	16
2.2. Bài toán 2.....	23
2.2.1. Định nghĩa nghiệm yếu và nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier – Stokes trong $[0, T) \times \Omega$	23
2.2.2. Sự tồn tại nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier – Stokes trong $[0, T) \times \Omega$	24
Kết luận.....	33
Tài liệu tham khảo	3

Lời nói đầu

Phương trình Navier – Stokes lần đầu tiên được Claude – Louis Navier thiết lập vào năm 1821 cho các chất lỏng không nén được và năm 1822 cho các chất lỏng nhớt. Nhưng Navier đi đến phương trình Navier – Stokes mà chưa hoàn toàn nhận thức rõ tầm quan trọng của các yếu tố xuất hiện trong phương trình. Cho đến khi George Stokes thiết lập lại dựa trên những giả thiết chính xác hơn trong một bài báo tựa đề *On the theories of the internal friction of fluids in motion*, xuất bản năm 1845. Cho đến nay đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về phương trình Navier – Stokes. Tuy nhiên, những hiểu biết về phương trình Navier – Stokes còn rất khiêm tốn, muốn biết lượng nhiệt lưu thông khi một chiếc máy bay đang bay, sự hình thành bão, sự chuyển động của không khí, giải thích hiện tượng sóng đập vào đuôi con tàu đang chạy trên mặt nước,... ta đều phải tìm cách giải phương trình Navier – Stokes, do nhu cầu của Khoa học và Công nghệ mà việc nghiên cứu phương trình Navier – Stokes ngày càng trở nên thời sự và cấp thiết.

Luận văn trình bày một vài kết quả nghiên cứu về nghiệm của bài toán chứa hệ phương trình Navier – Stokes.

Luận văn được bố cục thành hai chương cùng với Lời nói đầu, Kết luận và Danh mục các tài liệu tham khảo. Trong đó, Chương 2 là nội dung chính của luận văn.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày các khái niệm và các kết quả cơ sở cần thiết được sử dụng trong Chương 2.

Chương 2: Nghiệm mạnh địa phương của hệ phương trình Navier – Stokes

Trình bày định nghĩa về nghiệm yếu và nghiệm mạnh, sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương của hệ phương trình Navier – Stokes trong miền $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ và miền bị chặn $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ với một khoảng $[0, T), 0 < T \leq \infty$.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong Chương 1 trình bày lại một số kiến thức cơ sở làm nền tảng để nghiên cứu chương 2. Các tài liệu tham khảo được trích dẫn trong [1], [2], [3], [4], [7].

1.1. Không gian hàm

1.1.1. Không gian hàm trơn

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ là một miền với $n \geq 1$. Nếu $n = 1$, $\Omega = (a, b)$ là một khoảng mở với $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Giả sử $k \in \mathbb{N}_0$, ta kí hiệu $C^k(\Omega)$ là không gian của tất cả các hàm

$$\begin{aligned} u: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

sao cho $D^\alpha u$ tồn tại và liên tục trong Ω với mọi $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq k$.

$C^0(\Omega)$ là không gian của tất cả các hàm $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ gọi là không gian hàm trơn trong Ω .

Giả sử $\overline{M}$ là bao đóng của tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ta kí hiệu $\text{supp } u := \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$

là giá của hàm $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Nếu $k \in \mathbb{N}_0$ hoặc $k = \infty$ thì ta đặt

$$C_0^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega); \text{supp } u \text{ compact, } \text{supp } u \subseteq \Omega\}.$$

Do đó $u \in C_0^k(\Omega)$ nghĩa là $u \in C^k(\Omega)$ và $u = 0$ trong Ω ngoại trừ một tập con compact nào đó của Ω . Đặc biệt $C_0^k(\Omega)$ là không gian của tất cả các hàm trơn u bằng không ngoại trừ một tập con compact nào đó phụ thuộc vào u .

Giả sử $u|_M$ là hạn chế của hàm u trên tập con M . Với $k \in \mathbb{N}_0$ hoặc $k = \infty$ ta kí hiệu $C^k(\overline{\Omega})$ là không gian của tất cả các hạn chế $u|_{\overline{\Omega}}$ với $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\sup_{|\alpha| \leq k, x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| < \infty.$$

Nếu $k = \infty$ thì ta thay $|\alpha| \leq k$ bởi $|\alpha| < \infty$.

Ta xác định chuẩn

$$\|u\|_{C^k} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sup_{|\alpha| \leq k, x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|.$$

Nếu $k = \infty$ thì ta thay $|\alpha| \leq k$ bởi $|\alpha| < \infty$.

Ta ký hiệu

$$C_{loc}^k(\bar{\Omega}) := \{u|_{\bar{\Omega}}; u \in C^k(\square^n)\}.$$

Giả sử $n \geq 2, 0 < T \leq \infty$. Ta xác định không gian của trường vectơ không phân kỳ tron

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{u \in C_0^\infty(\Omega)^n; \operatorname{div} u = 0\}.$$

Ta xét không gian thử

$$C_0^\infty((0, T); C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)) := \{u \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n; \operatorname{div} u = 0\},$$

trong đó div áp dụng cho các biên số $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ và

$$C_0^\infty([0, T]; C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)) := \{u|_{[0,T] \times \Omega}; u \in C_0^\infty((-1, T) \times \Omega)^n; \operatorname{div} u = 0\}.$$

1.1.2. Không gian hàm suy rộng

Giả sử $\Omega \subseteq \square^n$ là một miền bất kỳ với $n \geq 1$.

Trong lý thuyết hàm suy rộng, không gian tuyến tính $C_0^\infty(\Omega)$ của hàm tron trên Ω gọi là không gian thử và $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gọi là hàm thử. Cho phiếm hàm tuyến tính

$$F : \varphi \rightarrow F(\varphi), \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Hàm F liên tục khi và chỉ khi với mỗi miền con $G \subseteq \Omega, \bar{G} \subseteq \Omega$, tồn tại $k \in \mathbb{N}_0$ và $C = C(F, G) > 0$ sao cho

$$|F(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{C^k(\bar{G})}$$

thỏa mãn với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Định nghĩa 1.1.2. Không gian tuyến tính $C_0^\infty(\Omega)'$ của tất cả các phiếm hàm tuyến tính

$$\begin{aligned} F : C_0^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto F(\varphi) \end{aligned}$$

liên tục, được gọi là không gian hàm suy rộng trong Ω . Kí hiệu

$$F(\varphi) = [F, \varphi] = [F, \varphi]_{\Omega}$$

là giá trị của F tại φ .

Mỗi hàm $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ xác định một hàm suy rộng được định nghĩa bởi

$$\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle_{\Omega} = \langle f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Ta kí hiệu hàm suy rộng là $\langle f, \cdot \rangle = \langle f, \cdot \rangle_{\Omega}$ hoặc f . Do đó ta xác định f với hàm suy rộng $\langle f, \cdot \rangle$ và phép nhúng

$$L^1_{loc}(\Omega) \subseteq C_0^{\infty}(\Omega)'.$$

Mỗi $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ gọi là một hàm suy rộng chính quy.

Xét toán tử vi phân bất kỳ $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ với $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Với mỗi

$F \in C_0^{\infty}(\Omega)'$ hàm suy rộng $D^{\alpha}F \in C_0^{\infty}(\Omega)'$ được định nghĩa bởi

$$[D^{\alpha}F, \varphi] := (-1)^{|\alpha|} [F, D^{\alpha}\varphi], \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Đặc biệt, với mỗi $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ hàm suy rộng $D^{\alpha}f = [D^{\alpha}f, \cdot] \in C_0^{\infty}(\Omega)'$ được định nghĩa bởi

$$[D^{\alpha}f, \varphi] := (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^{\alpha}\varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f (D^{\alpha}\varphi) dx.$$

Nếu $D^{\alpha}f$ chính quy thì tồn tại một hàm của $L^1_{loc}(\Omega)$ biểu thị qua $D^{\alpha}f$ sao cho

$$[D^{\alpha}f, \varphi] = \langle D^{\alpha}f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (D^{\alpha}f) \varphi dx \quad \text{với mọi } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Kí hiệu $D^{\alpha}f \in L^1_{loc}(\Omega)$ là $D^{\alpha}f$ chính quy và coi như một hàm trong $L^1_{loc}(\Omega)$.

Giả sử $F \in C_0^{\infty}(\Omega)'$ và

$$D := \sum_{|\alpha| \leq k} a_{\alpha} D^{\alpha}, \quad k \in \mathbb{N}_0, a_{\alpha} \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

là toán tử vi phân bất kỳ. $DF \in C_0^{\infty}(\Omega)'$ được định nghĩa bởi

$$[DF, \varphi] = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha} [F, D_{\alpha}\varphi], \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (1.2)$$

Đặc biệt, nếu $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ và Df được định nghĩa bởi (1.2) là hàm suy rộng chính quy xác định bởi một hàm được biểu thị qua Df thì ta viết đơn giản $Df \in L^1_{loc}(\Omega)$. Khi đó

$$[Df, \varphi] = \langle Df, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (Df) \varphi dx = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha} \langle f, D^{\alpha} \varphi \rangle \text{ với mọi } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Giả sử $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ và $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Nếu $D^{\alpha} f$ chính quy, $D^{\alpha} f \in L^1_{loc}(\Omega)$ thì ta gọi $D^{\alpha} f$ là đạo hàm yếu cấp α của f . Nếu $1 \leq q \leq \infty$ thì ký hiệu $D^{\alpha} f \in L^q(\Omega)$ là $D^{\alpha} f$ chính quy và là một hàm trong $L^q(\Omega)$, khi đó ta viết

$$\|D^{\alpha} f\|_q < \infty.$$

Tương tự, $Df \in L^q(\Omega)$ với D thỏa mãn (1.1) là chính quy.

Ta xét không gian tương ứng cho trường vector. Giả sử $m \in \mathbb{N}$ và

$$C_0^{\infty}(\Omega)^m := \{(\varphi_1, \dots, \varphi_m), \varphi_j \in C_0^{\infty}(\Omega), j = 1, \dots, m\}$$

là không gian hàm thử có giá trị vector $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ được trang bị tôpô tương ứng.

Với mỗi $F = (F_1, \dots, F_m)$, $F_j \in C_0^{\infty}(\Omega)'$, $j = 1, \dots, m$ ta định nghĩa hàm

$$F: \varphi \mapsto [F, \alpha], \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in C_0^{\infty}(\Omega)^m$$

bởi

$$[F, \alpha] = [F, \alpha]_{\Omega} := [F_1, \varphi_1] + \dots + [F_m, \varphi_m].$$

Ta ký hiệu

$$C_0^{\infty}(\Omega)'^m = C_0^{\infty}(\Omega)^{m'} = \{(F_1, \dots, F_m); F_j \in C_0^{\infty}(\Omega)', j = 1, \dots, m\}$$

là không gian suy rộng của không gian thử $C_0^{\infty}(\Omega)^m$.

Giả sử $f \in L^1_{loc}(\Omega)^m$ và $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ thì $f = (f_1, \dots, f_m)$ xác định hàm suy rộng

$$\varphi \mapsto [f, \varphi] = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx$$

trong đó $f \cdot \varphi = f_1 \varphi_1 + \dots + f_m \varphi_m$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in C_0^{\infty}(\Omega)^m$. Khi đó ta có phép nhúng

$$L^1_{loc}(\Omega)^m \subseteq C_0^{\infty}(\Omega)^{m'}.$$

Để xác định nghiệm yếu của phương trình Navier – Stokes ta xét không gian con của hàm thử không phân kỳ

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \left\{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n ; \operatorname{div} \varphi = 0 \right\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)^n.$$

Không gian $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)'$ của hàm tuyến tính liên tục được định nghĩa trên $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ là không gian của tất cả các hạn chế

$$F|_{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}, F \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^{n'}.$$

Do đó

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)' = \left\{ F|_{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}, F \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^{n'} \right\}.$$

Xét không gian Hilbert $L^2(\Omega)^n$ với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle_\Omega = \langle u, v \rangle := \int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx$$

và không gian con

$$L_\sigma^2(\Omega)^n := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_2} \subseteq L^2(\Omega)^n$$

là bao đóng trong chuẩn $\|\cdot\|_2$.

Với mỗi $u \in L^2(\Omega)^n$ xác định hàm $\langle u, \cdot \rangle : \varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n$ ta được phép nhúng tự nhiên

$$L^2(\Omega)^n \subseteq C_0^\infty(\Omega)^{n'}.$$

Tương tự, với mỗi $u \in L_\sigma^2(\Omega)$ xác định hàm $\langle u, \cdot \rangle : \varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle, \varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ được phép nhúng tự nhiên

$$L_\sigma^2(\Omega) \subseteq C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)'.$$

Sau đó, ta sử dụng phép chiếu trực giao $P : L^2(\Omega)^n \mapsto L_\sigma^2(\Omega)$ được gọi là phép chiếu Helmholtz.

1.1.3. Không gian Sobolev